Hinweis: Lösungsskizze. Lange Herleitungen sind in Kerngleichungen und Randbedingungen komprimiert.

Aufgabe 1: Bandstruktur und effektive Masse

(a) Aus Bandtheorie: Gruppengeschwindigkeit $v = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}$. Dynamik: $\hbar\frac{dk}{dt} = F$. Dann

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{dk}\right) = \frac{1}{\hbar}\frac{d^2E}{dk^2}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{d^2E}{dk^2}\frac{F}{\hbar} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}F.$$

Vergleich mit $a = F/m^*$ liefert

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}.$$

(b) Am Valenzbandmaximum ist $\frac{d^2E}{dk^2} < 0$. Elektronenbeschreibung würde $m^* < 0$ ergeben; stattdessen beschreibt man fehlende Elektronen als Löcher mit positiver Ladung und positiver effektiver Masse.

(c) Großes m^*: kleinere Krümmung ⇒ kleinere Beschleunigung, typischerweise geringere Mobilität. DOS steigt mit m^* im parabolischen Modell ($N_C, N_V \propto (m^*)^{3/2}$).

Aufgabe 2: Intrinsische Halbleiter: vollständige Herleitung

(a) 3D-Zustandszählung im k-Raum: Anzahl Zustände $\propto$ Kugelvolumen $\propto k^3$, mit Parabel $E - E_\mathrm{C} = \hbar^2k^2/(2m_n^*)$ folgt $k \propto \sqrt{E - E_\mathrm{C}}$. Ableitung nach E liefert $g_C(E) \propto \sqrt{E - E_\mathrm{C}}$.

(b) Im Boltzmann-Limes:

$$n = \int_{E_\mathrm{C}}^{\infty} g_C(E)\, e^{-(E-E_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\, dE = N_C e^{-(E_\mathrm{C}-E_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}.$$

Analog für p.

(c) Bedeutung: nicht-degeneriert ⇒ Besetzungswahrscheinlichkeit klein im betrachteten Energiebereich, FD vereinfacht zu Exponentialform.

Aufgabe 3: Dotierte Halbleiter: allgemeine Lösung

(a) Neutralität (voll ionisiert):

$$p + N_D = n + N_A.$$

(b) Mit $p = n_i^2/n$:

$$\frac{n_i^2}{n} + N_D = n + N_A \Rightarrow n^2 - (N_D - N_A)n - n_i^2 = 0.$$

(c) (i) $|N_D - N_A| \gg n_i$: $n \approx N_D - N_A$ (n-Typ) bzw. $p \approx N_A - N_D$ (p-Typ), Minderheit: n_i^2/Mehrheit. (ii) $N_D \approx N_A$: Kompensation ⇒ kleine Nettoträgerdichte, n, p können nahe n_i liegen.

Aufgabe 4: Transport und Gleichgewichtsfeld

(a)

$$J_n = qn\mu_n E + qD_n\frac{dn}{dx}.$$

(b) Gleichgewicht $J_n = 0$ und Einstein $D_n/\mu_n = k_\mathrm{B}T/q$:

$$qn\mu_n E + qD_n \frac{dn}{dx} = 0 \Rightarrow E = -\frac{D_n}{\mu_n}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx} = -\frac{k_\mathrm{B}T}{q}\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}.$$

(c) Interpretation: eingebautes Feld kompensiert Diffusion aufgrund Gradienten; genau dieses Feld entsteht z. B. in p–n-Übergängen durch Konzentrationsunterschiede.

Aufgabe 5: p–n-Übergang: vollständige Depletion-Analyse

(a) Aus Mehrheits-/Minderheitsträgern:

$$V_{bi} = \frac{k_\mathrm{B}T}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right).$$

(b) Raumladung:

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_A, & -x_p \le x \le 0 \\ +qN_D, & 0 \le x \le x_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Poisson: $dE/dx = \rho/\varepsilon_s$ mit $E(-x_p) = E(x_n) = 0$:

$$E(x) = -\frac{qN_A}{\varepsilon_s}(x + x_p) \quad (-x_p \le x \le 0), \qquad E(x) = \frac{qN_D}{\varepsilon_s}(x - x_n) \quad (0 \le x \le x_n).$$

(c) Feldkontinuität bei $x = 0$:

$$-\frac{qN_A x_p}{\varepsilon_s} = -\frac{qN_D x_n}{\varepsilon_s} \Rightarrow N_A x_p = N_D x_n,$$

und

$$E_\mathrm{max} = \frac{qN_A x_p}{\varepsilon_s} = \frac{qN_D x_n}{\varepsilon_s}.$$

(d) Potentialdifferenz als Dreiecksfläche:

$$V_{bi} - V_a = \int_{-x_p}^{x_n} (-E)\,dx = \frac{q}{2\varepsilon_s}(N_A x_p^2 + N_D x_n^2),$$

mit $W = x_p + x_n$ folgt

$$W = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{q}\left(\frac{N_A + N_D}{N_A N_D}\right)(V_{bi} - V_a)}.$$