Komplexe Zahlen Blatt 1

Iusuf Gemaledin, Ismail Gemaledin

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Real- und Imaginärteil

Geben Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = -2 + i, \quad z_3 = 7, \quad z_4 = -5i.$$

Lösung:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 3, \quad \mathrm{Im}(z_1) = -4$$
$$\mathrm{Re}(z_2) = -2, \quad \mathrm{Im}(z_2) = 1$$
$$\mathrm{Re}(z_3) = 7, \quad \mathrm{Im}(z_3) = 0$$
$$\mathrm{Re}(z_4) = 0, \quad \mathrm{Im}(z_4) = -5$$

Aufgabe 2: Addition und Subtraktion

Berechnen Sie:

$$(2 + 3i) + (4 - i), \quad (5 - 2i) - (3 + 4i).$$

Lösung:

$$(2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + (3 - 1)i = 6 + 2i$$
$$(5 - 2i) - (3 + 4i) = (5 - 3) + (-2 - 4)i = 2 - 6i$$

Aufgabe 3: Multiplikation

Berechnen Sie:

$$(2 + i)(3 - 2i), \quad (1 + i)^2.$$

Lösung:

$$(2 + i)(3 - 2i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2i) + i \cdot 3 + i \cdot (-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

Aufgabe 4: Konjugation

Berechnen Sie die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ und $z \cdot \overline{z}$ für:

$$z = 3 - 4i, \quad w = -2 + i.$$

Lösung:

$$\overline{z} = 3 + 4i, \quad z \cdot \overline{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 12i - 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\overline{w} = -2 - i, \quad w \cdot \overline{w} = (-2 + i)(-2 - i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 + 1 = 5$$

Aufgabe 5: Division

Berechnen Sie in der Form $a + bi$:

$$\frac{1}{2-i}, \quad \frac{3+i}{1-i}.$$

Lösung:

$$\frac{1}{2-i} = \frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\frac{3+i}{1-i} = \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1+i)}{1+1} = \frac{3+3i+i+i^2}{2} = \frac{3+4i-1}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

Aufgabe 6: Betrag

Berechnen Sie $|z|$ für:

$$z = 3 + 4i, \quad w = 1 - i.$$

Lösung:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Aufgabe 7: Potenzen von i

Vereinfachen Sie:

$$i^{17}, \quad i^{-5}, \quad i^{2023}.$$

Lösung:

$$i^{17} = i^{16} \cdot i = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 \cdot i = i$$

$$i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^4 \cdot i} = \frac{1}{1 \cdot i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{2023} = i^{2020} \cdot i^3 = (i^4)^{505} \cdot i^3 = 1^{505} \cdot (-i) = -i$$

Aufgabe 8: Einfache Bruchrechnung

Berechnen Sie:

$$\frac{2+i}{i}, \quad \frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}.$$

Lösung:

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{(2+i)i}{-1} = -(2i+i^2) = -(2i-1) = 1-2i$$

$$\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i} = \frac{1-i-(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-1-i}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Aufgabe 9: Gleichungen mit Real- und Imaginärteil

Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{R}$ so dass:

$$(2x-1) + (y+3)i = 5 + 2i.$$

Lösung: Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$y + 3 = 2 \Rightarrow y = -1$$

Aufgabe 10: Einfache Polarkoordinaten

Geben Sie in Polarkoordinaten an ($r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)$):

$$z = 1 + i, \quad w = -2.$$

Lösung: Für $z = 1 + i$:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Für $w = -2$:

$$|w| = 2, \quad \arg(w) = \pi$$

Zusätzliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 11

Berechnen Sie:

$$(3-2i) + (-1+4i), \quad (2+i)(3-5i).$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie $\overline{z}$ und $|z|$ für $z = 4 - 3i$.

Aufgabe 13

Berechnen Sie in der Form $a+bi$:

$$\frac{2-i}{3+2i}, \quad \frac{5i}{1-2i}.$$

Aufgabe 14

Vereinfachen Sie:

$$i^{33}, \quad i^{-10}, \quad i^{100}.$$

Aufgabe 15

Finden Sie $x, y \in \mathbb{R}$ mit:

$$(x+2)+(2y-1)i = 3-4i.$$

Aufgabe 16

Berechnen Sie:

$$(1+i)^3, \quad (2-i)^2.$$

Aufgabe 17

Geben Sie in Polarkoordinaten an:

$$z = -1+i, \quad w = 3i.$$

Aufgabe 18

Berechnen Sie:

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$$

Aufgabe 19

Bestimmen Sie den Realteil von $\frac{2+3i}{1-i}$.

Aufgabe 20

Lösen Sie die Gleichung:

$$z^2 + 4 = 0$$

für $z \in \mathbb{C}$.