Komplexe Zahlen – Blatt 3 (Anspruchsvolle Aufgaben)

Iusuf Gemaledin, Ismail Gemaledin

Anspruchsvolle gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen mit mehreren Operationen

Berechnen Sie in der Form $a + bi$:

$$z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} + \frac{|3-4i|^2}{\overline{2+i}} - \frac{i^{2023}}{(1+i)^2}.$$

Lösung:

1. $(1+i)^2 = 2i$, also $(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = (2i)^2 \cdot (1+i) = (-4)(1+i) = -4-4i$
2. $(1-i)^2 = -2i$, also $(1-i)^3 = (1-i)^2 \cdot (1-i) = (-2i)(1-i) = -2i + 2i^2 = -2i - 2 = -2 - 2i$
3. Erster Bruch: $\frac{-4-4i}{-2-2i} = \frac{-4(1+i)}{-2(1+i)} = 2$
4. $|3-4i|^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$
5. $\overline{2+i} = 2 - i$, also $\frac{25}{2-i} = \frac{25}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{25(2+i)}{4+1} = \frac{25(2+i)}{5} = 5(2+i) = 10 + 5i$
6. $i^{2023} = i^{2020} \cdot i^3 = (i^4)^{505} \cdot (-i) = 1^{505} \cdot (-i) = -i$
7. $(1+i)^2 = 2i$, also $\frac{-i}{2i} = -\frac{1}{2}$
8. $z = 2 + (10+5i) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + 10 + 5i + \frac{1}{2} = \frac{25}{2} + 5i$

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{C}$

Lösen Sie das System:

$$\begin{cases} z + iw = 2 + 3i \\ iz + w = 1 - i \end{cases} \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Lösung: Wir lösen durch Substitution oder Elimination.
Aus erster Gleichung: $z = 2 + 3i - iw$
In zweite einsetzen: $i(2 + 3i - iw) + w = 1 - i$
$2i + 3i^2 - i^2 w + w = 1 - i$
$2i - 3 + w + w = 1 - i$ (da $-i^2 w = w$)

$2i - 3 + 2w = 1 - i$
$2w = 1 - i - 2i + 3 = 4 - 3i$
$w = 2 - \frac{3}{2}i$
Einsetzen: $z = 2 + 3i - i\left(2 - \frac{3}{2}i\right) = 2 + 3i - 2i + \frac{3}{2}i^2 = 2 + i - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + i$

Aufgabe 3: Komplexe Wurzeln mit Parameter

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = \frac{1+i}{1-i}$ in Polarform.

Lösung: Zuerst vereinfachen: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$
Also $z^3 = i$
Polarform von i: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
Die dritten Wurzeln:

$$z_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Aufgabe 4: Betragsungleichung

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| \leq |z + i|$ und $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

Lösung: Sei $z = x + iy$. Die Ungleichung:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

Quadrieren (beide Seiten nichtnegativ):

$$(x-1)^2 + y^2 \leq x^2 + (y+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2y + 1$$
$$-2x \leq 2y \Rightarrow y \geq -x$$

Mit $\mathrm{Re}(z) = x \geq 0$: Die Menge ist der Halbraum oberhalb der Geraden $y = -x$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 5: Komplexe Folge

Betrachten Sie die Folge $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$.

(a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_3, a_4.

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Konvergiert die Folge?

Lösung: (a) Polarform: $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$
Nach de Moivre: $a_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$
$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$a_2 = i$
$a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$a_4 = -1$

(b) Die Potenzen durchlaufen die 8-ten Einheitswurzeln periodisch: $a_{n+8} = a_n$.
Die Häufungspunkte sind alle Werte $a_1, a_2, \ldots, a_8$.

(c) Die Folge konvergiert nicht, da sie unendlich viele verschiedene Werte annimmt (8-periodisch).

Aufgabe 6: Geometrische Interpretation

Zeigen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq w$ gilt:

$$\left|\frac{z+w}{z-w}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 0.$$

Lösung: Sei $z = a + bi$, $w = c + di$. Dann:

$$\left|\frac{z+w}{z-w}\right|^2 = \frac{|z+w|^2}{|z-w|^2} = \frac{(a+c)^2 + (b+d)^2}{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Dies gleich 1 genau dann, wenn:

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$$

$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$$

$$4ac + 4bd = 0 \Rightarrow ac + bd = 0$$

Andererseits: $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ Dies ist 0 genau dann, wenn $ac + bd = 0$.

Aufgabe 7: Potenzreihenartiger Ausdruck

Berechnen Sie:

$$S = \sum_{k=0}^{7} i^k = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^7.$$

Lösung: Die Summe ist eine endliche geometrische Reihe:

$$S = \frac{1 - i^8}{1 - i} = \frac{1-1}{1-i} = 0$$

Alternativ: $i^8 = 1$, und die ersten 8 Potenzen von i sind: $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i$, deren Summe 0 ist.

Aufgabe 8: Komplexe Gleichung mit Betrag

Lösen Sie in $\mathbb{C}$:

$$|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) = 3 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(z) = 1.$$

Lösung: Sei $z = 1 + iy$ (da $\mathrm{Re}(z) = 1$). Dann:

$$|z|^2 = 1 + y^2, \quad \mathrm{Im}(z) = y$$

Einsetzen: $1 + y^2 + 2y = 3$
$y^2 + 2y - 2 = 0$
$y = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$
Lösungen: $z_1 = 1 + (-1 + \sqrt{3})i$, $z_2 = 1 + (-1 - \sqrt{3})i$

Aufgabe 9: Transformation der komplexen Ebene

Gegeben $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Bestimmen Sie:

(a) Das Bild der reellen Achse unter f.

(b) Das Bild der imaginären Achse unter f.

Lösung: (a) Für $z = x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{(x-i)^2}{x^2+1} = \frac{x^2 - 1 - 2xi}{x^2+1}$$

Realteil: $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, Imaginärteil: $-\frac{2x}{x^2+1}$.
Es gilt: $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1$
Das Bild ist der Einheitskreis.
(b) Für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$:

$$f(iy) = \frac{iy-i}{iy+i} = \frac{i(y-1)}{i(y+1)} = \frac{y-1}{y+1} \in \mathbb{R}$$

Das Bild ist die reelle Achse (ohne den Punkt 1, falls man $y = -1$ ausschließt).

Aufgabe 10: Maximum eines Ausdrucks

Bestimmen Sie das Maximum von $|z^2 + 1|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.
Lösung: Sei $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Dann:

$$z^2 + 1 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta + 1 = (1 + \cos 2\theta) + i\sin 2\theta$$

$$|z^2 + 1|^2 = (1 + \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta = 1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 2 + 2\cos 2\theta$$

Maximum, wenn $\cos 2\theta = 1$: $|z^2 + 1|^2 = 4$, also $|z^2 + 1| = 2$.
Das Maximum ist 2, erreicht für $z = \pm 1$.

Zusätzliche anspruchsvolle Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 11

Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Aufgabe 13

Berechnen Sie: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 14

Gegeben $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = 1$ und $z_1 \neq z_2$. Zeigen Sie, dass $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$ reell ist und bestimmen Sie seinen Wert.

Aufgabe 15

Finden Sie alle Möbiustransformationen $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, die die imaginäre Achse auf sich selbst abbilden.

Aufgabe 16

Betrachten Sie die Folge $z_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, dass (z_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 17

Lösen Sie das System:

$$\begin{cases} |z| = |w| = 1 \\ z + w = 1 \end{cases} \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 18

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 19

Berechnen Sie: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ und bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge.

Aufgabe 20

Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, $z \neq 1$, gilt: $\frac{1+z}{1-z}$ ist rein imaginär.