Komplexe Zahlen – Blatt 2

Iusuf Gemaledin, Ismail Gemaledin

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen umformen

Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$z = \frac{(1+2i)^2}{3-i} + \frac{2+i}{i}.$$

Lösung:

$$(1+2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

$$\frac{-3+4i}{3-i} = \frac{-3+4i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{(-3+4i)(3+i)}{9+1} = \frac{-9-3i+12i+4i^2}{10} = \frac{-9+9i-4}{10} = \frac{-13+9i}{10}$$

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{(2+i)i}{-1} = -(2i+i^2) = -(2i-1) = 1-2i$$

$$z = \frac{-13+9i}{10} + (1-2i) = \frac{-13+9i}{10} + \frac{10-20i}{10} = \frac{-3-11i}{10} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$$

Aufgabe 2: Betrag und Argument

Gegeben:

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Bestimmen Sie jeweils $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ mit $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

Lösung:

$$|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\arg(z_1) = 2\pi - \arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = 2\pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(z_2) = \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Aufgabe 3: Polarform und Potenzen

Gegeben $z = 1 - i$.

(a) Geben Sie z in Polarform an.

(b) Berechnen Sie z^5 in Polarform und in der Form $a + bi$.

Lösung: (a) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{7\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

(b) Nach der Formel von de Moivre:

$$z^5 = (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{35\pi}{4} = 8\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (\text{da } 8\pi = 2\pi \cdot 4)$$

$$z^5 = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = 4(-1+i) = -4+4i$$

Aufgabe 4: Wurzeln komplexer Zahlen

Bestimmen Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ von $w^3 = 8i$ in Polarform mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$.

Lösung:

$$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Die dritten Wurzeln:

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

für $k = 0, 1, 2$:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i$$

Aufgabe 5: Gleichung mit konjugierter Zahl

Lösen Sie in $\mathbb{C}$:

$$z + 2\overline{z} = 3 + i.$$

Lösung: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann:

$$(x + iy) + 2(x - iy) = 3 + i$$

$$x + iy + 2x - 2iy = 3 + i$$

$$3x - iy = 3 + i$$

Vergleich Real- und Imaginärteil:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$-y = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$z = 1 - i$$

Aufgabe 6: Komplexe Potenzen

Berechnen Sie $(1 + i\sqrt{3})^6$.

Lösung: Zuerst Polarform: $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\arg = \frac{\pi}{3}$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Nach de Moivre:

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64(1 + 0i) = 64$$

Aufgabe 7: Bruch mit Beträgen

Berechnen Sie:

$$\frac{|3 - 4i|}{|1 + 2i|} + \frac{|\overline{2 + i}|}{|i|}.$$

Lösung:

$$|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad |1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{2 + i} = 2 - i, \quad |2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, \quad |i| = 1$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Aufgabe 8: Quadratische Gleichung

Lösen Sie in $\mathbb{C}$:

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Lösung: Mitternachtsformel:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Lösungen: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$

Aufgabe 9: Betragsgleichung

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| = |z+2i|$.

Lösung: Sei $z = x + iy$:

$$|x+iy-2| = |x+iy+2i|$$
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

Quadrieren:

$$(x-2)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2$$
$$x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2+4y+4$$
$$-4x = 4y \Rightarrow x = -y$$

Die Menge ist die Gerade $y = -x$.

Aufgabe 10: Produkt in Polarform

Gegeben $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in Polarform.

Lösung:

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Zusätzliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 11

Berechnen Sie in der Form $a + bi$:

$$\frac{(2-i)^3}{1+i} + \frac{3+2i}{i^5}.$$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^4 = -16$ in Polarform mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 13

Gegeben $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. Berechnen Sie z^5 und z^{-2} in Polarform.

Aufgabe 14

Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z\overline{z} - 2z + 2\overline{z} = 3$.

Aufgabe 15

Berechnen Sie $(1-i)^{10}$ mithilfe der Polarform.

Aufgabe 16

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2022}}$.

Aufgabe 17

Gegeben $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in Polarform.

Aufgabe 18

Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| = |z-i|$.

Aufgabe 19

Berechnen Sie: $\left|\frac{3+4i}{1-2i}\right| + \left|\frac{2-i}{i}\right|$.

Aufgabe 20

Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 5 = 0$.