Übungsblatt: Grenzwerte von Folgen

Ismail Gemaledin, Iusuf Gemaledin

Gelöste Aufgaben

Aufgabe 1: Direkte Grenzwertberechnung

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{2n^2 + 7n - 1}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{2n^2 + 7n - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(2 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Denkweise: Bei Brüchen mit Polynomen immer höchste Potenz im Zähler und Nenner ausklammern.

Aufgabe 2: Sandwichsatz (Einschließungssatz)

Zeige: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2)}{n} = 0$.

Lösung: Wir wissen: $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ für alle n.

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt aus dem Sandwichsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2)}{n} = 0$$

Denkweise: Bei Termen mit beschränkten Funktionen (sin, cos, etc.) durch passende Folgen einschließen.

Aufgabe 3: Konjugierte Multiplikation

Bestimme $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3n}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}\\
&= \frac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}\\
&= \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\\
&= \frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}\\
&= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \to \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Denkweise: Bei Differenzen von Wurzeln immer konjugierte Multiplikation anwenden.

Aufgabe 4: Exponentialfolgen

Untersuche $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Lösung: Substitution: $m=\frac{n}{2}$, also $n=2m$:

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{6m} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{6}$$

Da $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$, folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = e^6$$

Denkweise: Auf bekannte Grenzwerte der Form $(1+1/n)^n$ zurückführen.

Aufgabe 5: Trigonometrische Folge mit Substitution

Berechne $\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Lösung: Substitution: $x=\frac{\pi}{n}$, also $n=\frac{\pi}{x}$. Für $n\to\infty$ gilt $x\to 0^+$:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\cdot\sin x = \pi\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = \pi\cdot 1 = \pi$$

Denkweise: Bei $n\cdot f(1/n)$ Substitution $x=1/n$ verwenden und bekannte Grenzwerte wie $\frac{\sin x}{x}\to 1$ nutzen.

Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe 6

Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 - 2n + 7}{3n^3 + 4n^2 - 1}$.

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 2n + 7}{3n^3 + 4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{3 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3}} = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 7

Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n) + 2\cos(n)}{n} = 0$.

Lösung: Da $|\sin(n)| \leq 1$ und $|\cos(n)| \leq 1$, gilt:

$$-3 \leq \sin(n) + 2\cos(n) \leq 3$$

$$-\frac{3}{n} \leq \frac{\sin(n) + 2\cos(n)}{n} \leq \frac{3}{n}$$

Mit $\lim_{n\to\infty}(\pm 3/n) = 0$ folgt die Behauptung aus dem Sandwichsatz.

Aufgabe 8

Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 - 3n})$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 - 3n} \\
&= \frac{(n^2 + 5n) - (n^2 - 3n)}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 - 3n}} \\
&= \frac{8n}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 - 3n}} \\
&= \frac{8n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n}}\right)} \\
&= \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n}}} \to \frac{8}{1 + 1} = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 9

Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right)^{2n}$.

Lösung: Substitution: $m = 3n$, also $n = m/3$:

$$\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}m} = \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{2}{3}} \to e^{-\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 10

Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+3}$.

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

Aufgabe 11

Untersuche $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Lösung: Wir schätzen ab:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n}$$

Da $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, folgt aus dem Sandwichsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Aufgabe 12

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$.

Lösung: Klammere 3^n aus:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n+3^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \\
&= \frac{0+\frac{1}{3}}{0+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13

Berechne $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$.

Lösung: Substitution: $x = \sqrt[n]{5}-1$, also $\sqrt[n]{5} = 1+x$. Dann:

$$5 = (1+x)^n \Rightarrow \ln 5 = n\ln(1+x) \Rightarrow n = \frac{\ln 5}{\ln(1+x)}$$

Für $n \to \infty$ gilt $x \to 0$. Also:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5}-1) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 5}{\ln(1+x)} \cdot x = \ln 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \ln 5$$

Aufgabe 14

Untersuche $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+2)}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+2)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\ln\left[n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3\ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}}{3 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{\ln n}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n+3}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n+3} &= \left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{n+3} \\
&= \left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{4} \\
&\to e^3 \cdot 1^4 = e^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 16

Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Lösung: Mit der Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+\cdots}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 17

Untersuche $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n}$.

Lösung: Klammere 4^n aus:

$$\sqrt[n]{3^n+4^n} = 4 \cdot \sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to 4 \cdot \sqrt[n]{1+0} = 4$$

Aufgabe 18

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\arctan(n)}{n}$.

Lösung: Da $-\frac{\pi}{2} < \arctan(n) < \frac{\pi}{2}$ für alle n, gilt:

$$-\frac{\pi}{2n} < \frac{\arctan(n)}{n} < \frac{\pi}{2n}$$

Mit $\lim_{n\to\infty}(\pm\pi/(2n)) = 0$ folgt aus dem Sandwichsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)}{n} = 0$$

Aufgabe 19

Berechne $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 20

Untersuche $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$.

Lösung: Für $n \geq 4$ gilt:

$$0 \leq \frac{n^n}{(2n)!} \leq \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdots(2n)} \leq \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \frac{1}{n!} \to 0$$

Nach Sandwichsatz: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

Aufgabe 21

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$.

Lösung: Da $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$, folgt:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^n \to \infty$$

Der Grenzwert existiert nicht (divergiert gegen ∞).

Aufgabe 22

Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n}-n}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Lösung: Zuerst Zähler und Nenner einzeln behandeln:

Zähler: $\sqrt[3]{n^3+2n}-n = n\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}-1\right)$

Entwicklung: $\sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\cdots$ für $x=\frac{2}{n^2}$:

$$= n\left(\frac{2}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2}{3n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Nenner: $\sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3n}+\cdots}{\frac{1}{2n}+\cdots} = \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 23

Untersuche $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$.

Lösung: Mit Taylor-Entwicklung: $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)$ für $x=\frac{1}{n}$:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \to -\frac{1}{6}$$

Aufgabe 24

Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 4^n}$.

Lösung: Mit Stirling-Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$:

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 4^n} &\sim \frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^2\cdot 4^n} \\
&= \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2\pi n\cdot\frac{n^{2n}}{e^{2n}}\cdot 4^n} \\
&= \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\cdot\frac{2^{2n}\cdot n^{2n}}{n^{2n}\cdot 4^n} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n}\cdot\frac{4^n}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 25

Berechne $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

Lösung:

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$$

Aufgabe 26

Untersuche $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3n+2}{2n-1}}$.

Lösung:

$$\sqrt[n]{\frac{3n+2}{2n-1}}=\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln\frac{3n+2}{2n-1}\right)$$

Da $\frac{1}{n}\ln\frac{3n+2}{2n-1}\to 0\cdot\ln\frac{3}{2}=0$, folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3n+2}{2n-1}}=e^0=1$$

Aufgabe 27

Bestimme $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot n+3}{2n+1}$.

Lösung:

$$\frac{(-1)^n\cdot n+3}{2n+1}=\frac{n\left((-1)^n+\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{(-1)^n+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

Die Folge oszilliert zwischen Näherung an $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, hat also **keinen Grenzwert**.

Aufgabe 28

Berechne $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+5}-n^2}{\sqrt{n^2+2}-n}$.

Lösung: Zähler: $\sqrt{n^4+5}-n^2=\frac{5}{\sqrt{n^4+5}+n^2}\sim\frac{5}{2n^2}$

Nenner: $\sqrt{n^2+2}-n=\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\sim\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$

Also:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2n}=0$$

Aufgabe 29

Untersuche $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$.

Lösung:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \exp\left(\frac{1}{\ln n} \cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{-\ln n}{\ln n}\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

Aufgabe 30

Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ für $0 < b < a$.

Lösung: Klammere a^n aus:

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Zusammenfassung wichtiger Techniken

1. **Ausklammern**: Höchste Potenz bei Polynombrüchen
2. **Sandwichsatz**: Bei beschränkten Termen (trigonometrische Funktionen)
3. **Konjugierte Multiplikation**: Bei Differenzen von Wurzeln
4. **Substitution**: Um bekannte Grenzwerte zu erhalten
5. **Exponential-/Logarithmus-Umformung**: Bei Ausdrücken der Form $f(n)^{g(n)}$
6. **Taylor-Entwicklung**: Für präzise Approximationen
7. **Stirling-Formel**: Bei Fakultäten für große n