Folgen und Reihen - Blatt 1

Ismail Gemaledin, Iusuf Gemaledin

Theoretische Grundlagen

Eine **Folge** ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), geschrieben als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine **Reihe** ist die Summe der Glieder einer Folge: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wichtige Konzepte

- **Grenzwert**: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
- **Häufungspunkt**: Wert, dem sich unendlich viele Folgenglieder nähern
- **Supremum/Infimum**: $\sup_n a_n$, $\inf_n a_n$
- **Limes superior/inferior**: $\limsup$, $\liminf$
- **Konvergenz**: Existenz eines endlichen Grenzwerts
- **Monotonie**: $a_{n+1} \geq a_n$ (wachsend), $a_{n+1} \leq a_n$ (fallend)

Gelöste Beispiele

Beispiel 1: Folge mit komplexer Basis

Aufgabe: Untersuchen Sie die Folge $a_n = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n\right]$.

Lösung:

Schritt 1: Polarform bestimmen

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\pi/6}$$

Somit: $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = e^{in\pi/6}$

Schritt 2: Realteil extrahieren

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

Schritt 3: Erste Glieder berechnen

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \approx 0.866 \\
a_2 &= \cos(\pi/3) = 1/2 = 0.5 \\
a_3 &= \cos(\pi/2) = 0 \\
a_4 &= \cos(2\pi/3) = -1/2 = -0.5
\end{aligned}$$

Schritt 4: Periodizität erkennen Da cos periodisch mit Periode 2π, aber $n\pi/6 \bmod 2\pi$: Die Folge ist periodisch mit Periode 12.

Schritt 5: Häufungspunkte bestimmen Die Folge oszilliert zwischen Werten aus $\{\pm 1, \pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2, 0\}$. Da sie periodisch ist, hat sie **keinen Grenzwert**, aber alle auftretenden Werte sind Häufungspunkte.

Schritt 6: Supremum und Infimum

$$\sup a_n = 1, \quad \inf a_n = -1$$

Beispiel 2: Gemischte rekursive Folge

Aufgabe: Sei $x_1 = 2$ und $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\right)$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie Konvergenz und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

Schritt 1: Vermutung für Grenzwert Wenn $x_n \to L$, dann gilt im Grenzwert:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right)$$

Multiplikation mit $2L$: $2L^2 = L^2 + 3 \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \sqrt{3}$ (positiv, da $x_1 > 0$).

Schritt 2: Monotonie zeigen Für $x > 0$ gilt: $\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \geq \sqrt{3}$ (AM-GM-Ungleichung). Außerdem: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x_n} - x_n\right)$.

Für $x_n > \sqrt{3}$: $x_{n+1} < x_n$ (fallend).
Für $x_n < \sqrt{3}$: $x_{n+1} > x_n$ (steigend).

Schritt 3: Beschränktheit Durch Induktion: $x_n \geq \sqrt{3}$ für $n \geq 2$ (aus AM-GM).

Schritt 4: Konvergenz Monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow$ konvergent.

Schritt 5: Grenzwert Wie in Schritt 1: $L = \sqrt{3}$.

Beispiel 3: Teleskopreihe mit Logarithmus

Aufgabe: Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ und bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Lösung:

Schritt 1: Logarithmus umformen

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$

Schritt 2: Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k] = (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$= \ln(n+1)-\ln 1 = \ln(n+1)$$

Schritt 3: Unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty$$

Die Reihe divergiert gegen $+\infty$.

Zusatzaufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe Z1

Gegeben sei die Folge $a_n = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^n\right]$.

(a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_3, a_4.

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte.

(c) Berechnen Sie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$.

(d) Ist die Folge konvergent?

Aufgabe Z2

Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge:

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \sqrt{2+b_n} \text{ für } n \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie durch Induktion: $b_n \leq 2$ für alle n.

(b) Zeigen Sie Monotonie.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe Z3

Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{q^n}{n}-\frac{q^{n+1}}{n+1}\right)?$$

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Summe.

Aufgabe Z4

Berechnen Sie die Partialsummen und untersuchen Sie Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$$

Verwenden Sie Partialbruchzerlegung.

Aufgabe Z5

Gegeben sei die Folge $c_n = \frac{n^2 \cos(n\pi/2)}{n^2+1}$.

(a) Bestimmen Sie die Teilfolgen für $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$.

(b) Finden Sie alle Häufungspunkte.

(c) Berechnen Sie $\limsup c_n$ und $\liminf c_n$.

Aufgabe Z6

Untersuchen Sie Konvergenz und gegebenenfalls Summe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

Aufgabe Z7

Sei $d_1 = \frac{1}{2}$ und $d_{n+1} = d_n - d_n^2$ für $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie: $0 < d_n < 1$ für alle n.

(b) Zeigen Sie: d_n ist monoton fallend.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$.

(d) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2$.

Wichtige Formeln und Sätze

- **Geometrische Reihe**: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- **Harmonische Reihe**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- **Monotoniekriterium**: Monotone beschränkte Folgen konvergieren
- **Cauchy-Kriterium**: Folge konvergiert $\Leftrightarrow$ sie ist Cauchy-Folge

Lösungshinweise

1. Bei komplexen Folgen: Immer zuerst in Polarform $re^{i\theta}$ umwandeln
2. Bei Reihen: Auf Teleskopstruktur prüfen ($a_n = b_n - b_{n+1}$)
3. Bei rekursiven Folgen: Beschränktheit und Monotonie zeigen vor Grenzwertberechnung
4. Für $\limsup/\liminf$: Größten/kleinsten Häufungspunkt bestimmen
5. Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right)$