Beispielaufgabe: Basiswechsel und Abbildungsmatrix

Ismail Gemaledin

Aufgabenstellung

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $P : p_1, p_2, p_3$ des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ durch:

$$p_1(X) := X^2 + 1, \quad p_2(X) := X - 2, \quad p_3(X) := 1.$$

Weiter seien Vektoren gegeben:

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ sei definiert durch:

$$\alpha \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := c(X^2 + 2) + d(X - 1) + (c + d)(X + 2).$$

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}^{B}v$ von v bezüglich der Basis B sowie $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_{P}\alpha_{B}$ von α bezüglich der Basen B (Definitionsbereich) und P (Zielbereich).

Lösung

(a) Koordinatenvektor ${}^{B}v$

Wir suchen $x, y \in \mathbb{R}$ mit:

$$xb_1 + yb_2 = v.$$

Einsetzen:

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung: $x = y + 3$.
Einsetzen in die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} 3(y+3) + 2y &= 5 \\ 3y + 9 + 2y &= 5 \\ 5y + 9 &= 5 \\ 5y &= -4 \\ y &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Damit:

$$x = -\frac{4}{5} + 3 = \frac{11}{5}.$$

Ergebnis:

$$^{B}v = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnung von $\alpha(w)$

Für $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist $c = 4$, $d = -3$.

$$\begin{aligned} \alpha(w) &= 4(X^2+2) + (-3)(X-1) + (4-3)(X+2) \\ &= 4X^2 + 8 - 3X + 3 + X + 2 \\ &= 4X^2 + (-3X + X) + (8 + 3 + 2) \\ &= 4X^2 - 2X + 13. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\alpha(w) = 4X^2 - 2X + 13}.$$

(b) Abbildungsmatrix ${}_P\alpha_B$

Die Matrix ${}_P\alpha_B$ enthält in den Spalten die P-Koordinaten von $\alpha(b_1)$ und $\alpha(b_2)$.

1. Bild von b_1: $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $c = 3, d = 1$.

$$\begin{aligned} \alpha(b_1) &= 3(X^2+2) + 1(X-1) + (3+1)(X+2) \\ &= 3X^2 + 6 + X - 1 + 4X + 8 \\ &= 3X^2 + 5X + 13. \end{aligned}$$

Darstellung in Basis P: Suche $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$3X^2 + 5X + 13 = a(X^2+1) + b(X-2) + c \cdot 1.$$

Vereinfachen der rechten Seite:

$$aX^2 + bX + (a - 2b + c).$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 5 \\ a - 2b + c &= 13 \;\Rightarrow\; 3 - 10 + c = 13 \;\Rightarrow\; c = 20. \end{aligned}$$

Somit: $\alpha(b_1) = 3p_1 + 5p_2 + 20p_3$.

2. Bild von b_2: $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $c = 2, d = -1$.

$$\begin{aligned} \alpha(b_2) &= 2(X^2 + 2) + (-1)(X - 1) + (2 - 1)(X + 2) \\ &= 2X^2 + 4 - X + 1 + X + 2 \\ &= 2X^2 + 7. \end{aligned}$$

Darstellung in Basis P:

$$2X^2 + 7 = a(X^2 + 1) + b(X - 2) + c.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 0 \\ a - 2b + c &= 7 \;\Rightarrow\; 2 + c = 7 \;\Rightarrow\; c = 5. \end{aligned}$$

Somit: $\alpha(b_2) = 2p_1 + 0p_2 + 5p_3$.

3. Matrix aufstellen:

$${}_P\alpha_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:

$$\boxed{{}_P\alpha_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Zusammenfassung der Methode

1. **Kurzschreibweise**: ${}^B v$ bezeichnet den Koordinatenvektor von v bezüglich Basis B.
2. **Abbildungsmatrix**: Um ${}_P\alpha_B$ zu bestimmen:
   - Wende α auf jeden Basisvektor b_j von B an.
   - Stelle die Bilder $\alpha(b_j)$ in der Zielbasis P dar.
   - Schreibe die Koordinaten als Spalten in die Matrix.

Zusatzaufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe Z1

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2$ des $\mathbb{R}^2$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $P : p_1, p_2, p_3$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$:

$$p_1(X) := X^2 - X, \quad p_2(X) := X + 1, \quad p_3(X) := 1.$$

Weiter seien:

$$v := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto c(2X^2 - 1) + d(X^2 + X) + (c - d)(X + 3).$$

(a) Bestimmen Sie ${}^{B}v$ und $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie ${}_{P}\alpha_{B}$.

Aufgabe Z2

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2, b_3$ des $\mathbb{R}^3$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $P : p_1, p_2, p_3$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$:

$$p_1(X) := X^2, \quad p_2(X) := 2X, \quad p_3(X) := 3.$$

Weiter seien:

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung:

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a(X^2 + 2X) + b(3 - X) + c(X^2 + X + 1).$$

(a) Bestimmen Sie ${}^{B}v$ und $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie ${}_{P}\alpha_{B}$.

Aufgabe Z3

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2$ des $\mathbb{R}^2$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $Q : q_1, q_2, q_3$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$:

$$q_1(X) := 2X^2 + 1, \quad q_2(X) := X - 3, \quad q_3(X) := X^2 - X.$$

Weiter seien:

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (c+d)X^2 + 2cX + d(4 - X).$$

(a) Bestimmen Sie ${}^B v$ und $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie ${}_Q\alpha_B$.

Aufgabe Z4

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2, b_3$ des $\mathbb{R}^3$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $P : p_1, p_2, p_3, p_4$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$:

$$p_1(X) := X^3, \quad p_2(X) := X^2, \quad p_3(X) := X, \quad p_4(X) := 1.$$

Weiter seien:

$$v := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung:

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto aX^3 + b(X^2 - X) + c(2X + 1) + (a+b)X^2.$$

(a) Bestimmen Sie ${}^B v$ und $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie ${}_P\alpha_B$.

Aufgabe Z5

Gegeben sei die Basis $B : b_1, b_2$ des $\mathbb{R}^2$ durch:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sowie die Basis $P : p_1, p_2, p_3$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$:

$$p_1(X) := X^2 + X, \quad p_2(X) := 3, \quad p_3(X) := X - 1.$$

Weiter seien:

$$v := \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und die Abbildung:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (2c - d)X^2 + c(X + 4) + d(3X - 2).$$

(a) Bestimmen Sie ${}^{B}v$ und $\alpha(w)$.
(b) Bestimmen Sie ${}_{P}\alpha_{B}$.